

**Estudios matemáticos**  
**Nivel medio**  
**Prueba 2**

Viernes 11 de noviembre de 2016 (mañana)

1 hora 30 minutos

---

**Instrucciones para los alumnos**

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Para esta prueba, se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de estudios matemáticos NM**.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán darse como valores exactos o con una aproximación de tres cifras significativas.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[90 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. Se recomienda que muestre todos los cálculos, siempre que sea posible. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar un gráfico de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. [Puntuación máxima: 17]

El mes previo a los exámenes del Diploma del IB, ocho alumnos varones fueron anotando el número de horas que pasaban en las redes sociales.

En la siguiente tabla se muestra, para cada alumno, el número de horas que pasó en las redes sociales ( $x$ ) y el número de puntos del Diploma del IB que ha obtenido ( $y$ ).

<b>Horas que pasó en las redes sociales (<math>x</math>)</b>	6	15	26	12	13	40	33	23
<b>Puntos del Diploma del IB (<math>y</math>)</b>	43	33	27	36	39	17	20	33

- (a) En un papel milimetrado, dibuje con precisión un diagrama de dispersión que represente estos datos. Utilice la siguiente escala: 2 cm para representar 5 horas en el eje  $x$  y 2 cm para representar 10 puntos en el eje  $y$ . [4]
- (b) Utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar
  - (i)  $\bar{x}$ , la media del número de horas que pasaron en las redes sociales;
  - (ii)  $\bar{y}$ , la media del número de puntos del Diploma del IB. [2]
- (c) Sitúe en el diagrama de dispersión el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  y rotúlelo con una M. [2]
- (d) Escriba para estos datos el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson  $r$ . [2]
- (e) Escriba la ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  correspondiente a los datos de estos ocho alumnos varones. [2]
- (f) Dibuje con precisión, sobre el diagrama de dispersión, la recta de regresión del apartado (e). [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Diez alumnas también anotaron el número de horas que pasaban en las redes sociales durante el mes previo a los exámenes del Diploma del IB. Cada una de estas alumnas pasó entre 3 y 30 horas en las redes sociales.

La ecuación de la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$  correspondiente a los datos de estas diez alumnas es

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{125}{3}.$$

Una undécima alumna cuenta que pasó 34 horas en las redes sociales durante el mes previo a los exámenes del Diploma del IB.

- (g) Utilice la ecuación de la recta de regresión dada para estimar el número de puntos del Diploma del IB que ha obtenido esta alumna. [2]
- (h) Escriba un motivo que explique por qué esta estimación no es fiable. [1]

**Véase al dorso**

## 2. [Puntuación máxima: 12]

Un grupo de 66 personas se van de vacaciones a Hawaii. Durante su estancia se organizaron tres viajes: un viaje en barco ( $B$ ), un viaje en autocar ( $C$ ) y un viaje en helicóptero ( $H$ ).

De este grupo de personas:

- 3 fueron a los tres viajes;
- 16 fueron **únicamente** al viaje en autocar;
- 13 fueron **únicamente** al viaje en barco;
- 5 fueron **únicamente** al viaje en helicóptero;
- $x$  fueron al viaje en autocar y al viaje en helicóptero **pero no** al viaje en barco;
- $2x$  fueron al viaje en barco y al viaje en helicóptero **pero no** al viaje en autocar;
- $4x$  fueron al viaje en barco y al viaje en autocar **pero no** al viaje en helicóptero;
- 8 no fueron a ninguno de los viajes.

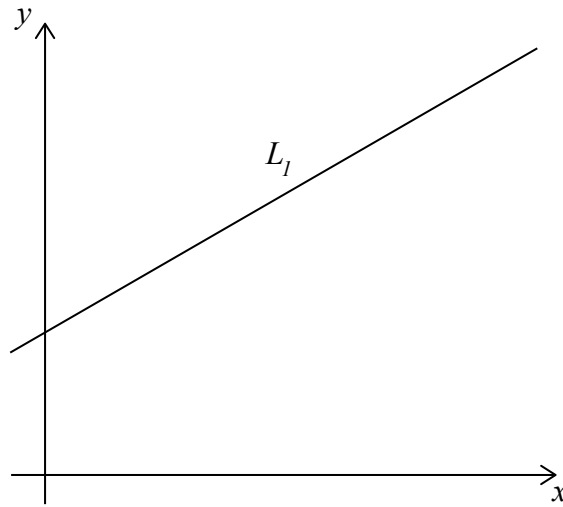
- (a) Dibuje con precisión un diagrama de Venn para representar toda esta información. Para ello, utilice conjuntos rotulados como  $B$ ,  $C$  y  $H$ . [5]
- (b) Muestre que  $x = 3$ . [2]
- (c) Escriba el valor de  $n(B \cap C)$ . [1]

Se escoge al azar a una persona de este grupo.

- (d) Halle la probabilidad de que esta persona
- (i) haya ido como mucho a un viaje;
  - (ii) haya ido al viaje en autocar, sabiendo que esta persona también fue al viaje en barco y al viaje en helicóptero. [4]

3. [Puntuación máxima: 17]

La recta  $L_1$  tiene por ecuación  $2y - x - 7 = 0$  y se muestra en la siguiente figura.



El punto A tiene coordenadas (1, 4).

(a) Muestre que A pertenece a  $L_1$ . [2]

El punto C tiene coordenadas (5, 12). M es el punto medio de AC.

(b) Halle las coordenadas de M. [2]

(c) Halle la longitud de AC. [2]

La línea recta  $L_2$  es perpendicular a AC y pasa por M.

(d) Muestre que la ecuación de  $L_2$  es  $2y + x - 19 = 0$ . [5]

El punto D es la intersección de  $L_1$  y  $L_2$ .

(e) Halle las coordenadas de D. [2]

La longitud de MD es  $\frac{\sqrt{45}}{2}$ .

(f) Escriba la longitud de MD redondeando a cinco cifras significativas. [1]

El punto B es tal que ABCD es un rombo.

(g) Halle el área de ABCD. [3]

Véase al dorso

4. [Puntuación máxima: 11]

Un fabricante produce al día 1500 cajas de cereales para el desayuno.

Los pesos de estas cajas sigue una distribución normal de media 502 gramos y una desviación típica igual a 2 gramos.

(a) Dibuje con precisión un diagrama que represente esta información. [2]

Todas las cajas de cereales que tienen un peso comprendido entre 497,5 gramos y 505 gramos se venden. El ingreso del fabricante por cada caja de cereales que se vende es \$2,00.

(b) (i) Halle la probabilidad de que una caja de cereales, elegida al azar, se venda.

(ii) Calcule el ingreso diario esperado que recibirá el fabricante por estas ventas. [4]

El fabricante recicla todas las cajas de cereales que tienen un peso que **no está** entre 497,5 gramos y 505 gramos. El costo del reciclaje para el fabricante es de \$0,16 por caja.

(c) Calcule el costo diario esperado del reciclaje para el fabricante. [2]

Otro fabricante **distinto** produce cajas de cereales cuyo peso sigue una distribución normal de media 350 gramos y una desviación típica igual a 1,8 gramos.

Este fabricante vende todas las cajas de cereales cuyo peso está por encima de un peso mínimo,  $w$ .

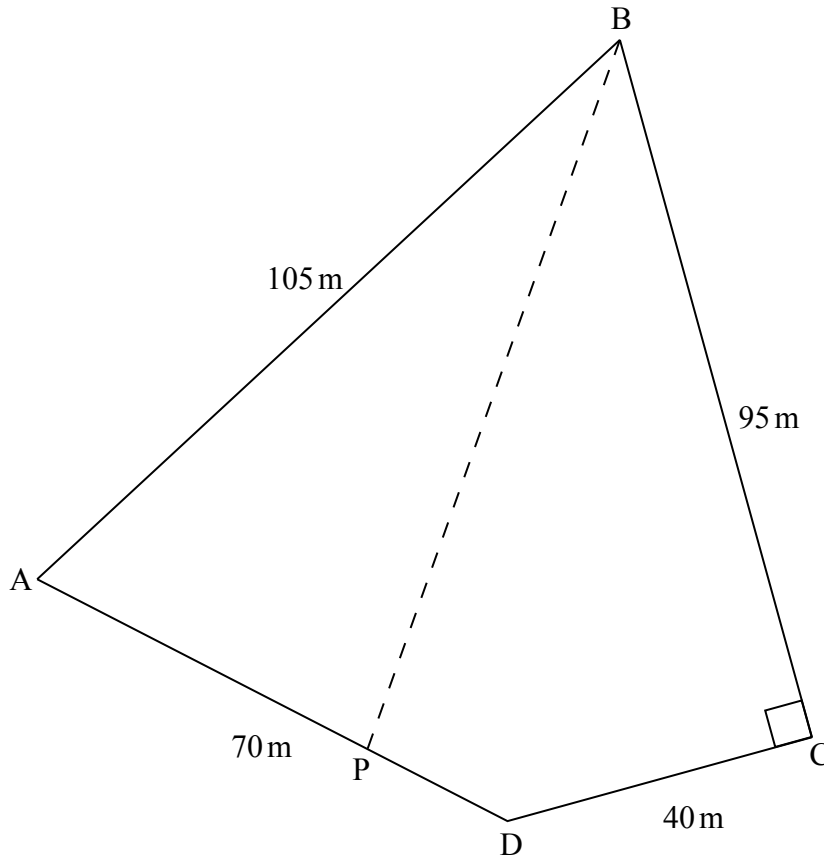
Vende el 97% de todas las cajas de cereales que producen.

(d) Calcule el valor de  $w$ . [3]

5. [Puntuación máxima: 16]

Un agricultor posee un terreno que tiene la forma del cuadrilátero ABCD.  $AB = 105\text{ m}$ ,  $BC = 95\text{ m}$ ,  $CD = 40\text{ m}$ ,  $DA = 70\text{ m}$  y el ángulo  $DCB = 90^\circ$ .

la figura no está dibujada a escala



El agricultor quiere dividir el terreno en dos partes que tengan el mismo área. Para ello construye una valla que va en línea recta desde el punto B al punto P que pertenece a AD, de modo que el área de PAB sea igual al área de PBCD.

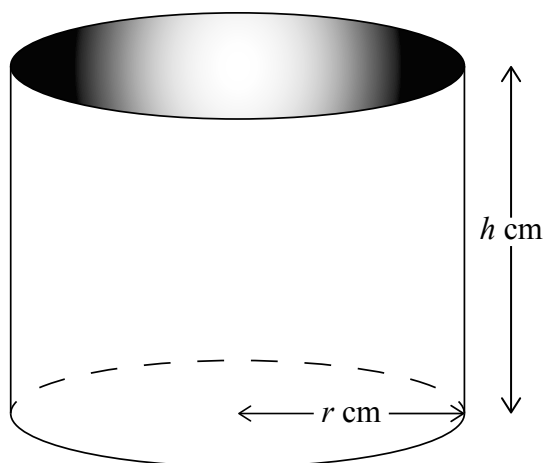
Calcule

- (a) la longitud de BD; [2]
- (b) el valor del ángulo DAB; [3]
- (c) el área del triángulo ABD; [3]
- (d) el área del cuadrilátero ABCD; [2]
- (e) la longitud de AP; [3]
- (f) la longitud de la valla, BP. [3]

Véase al dorso

6. [Puntuación máxima: 17]

Un contenedor de agua tiene forma de cilindro. La altura interna es igual a  $h$  cm y el radio de la base interna es igual a  $r$  cm.



El contenedor de agua no tiene tapa. Las superficies internas del contenedor se van a recubrir con un material impermeabilizante.

- (a) Escriba una fórmula que permita calcular el área  $A$ , de la superficie que se va a recubrir. [2]

El volumen del contenedor de agua es igual a  $0,5 \text{ m}^3$ .

- (b) Exprese este volumen en  $\text{cm}^3$ . [1]
- (c) Escriba, en función de  $r$  y de  $h$ , una ecuación que permita calcular el volumen de este contenedor de agua. [1]

- (d) Muestre que  $A = \pi r^2 + \frac{1000000}{r}$ . [2]

El contenedor de agua está diseñado de modo tal que se minimice el área que se ha de recubrir.

- (e) Halle  $\frac{dA}{dr}$ . [3]
- (f) Utilizando la respuesta obtenida en el apartado (e), halle el valor de  $r$  que minimiza  $A$ . [3]
- (g) Halle el valor de esta área mínima. [2]

Con una lata de material impermeabilizante se puede recubrir una superficie de  $2000 \text{ cm}^2$ .

- (h) Halle el número mínimo de latas de material impermeabilizante con el que se puede recubrir todo el área calculada en el apartado (g). [3]